



# Les chiffres du Philippe XII: taux actuariel et duration

ECHO  
11.3.94

**Le Philippe XII s'adresse à l'épargnant qui envisage un placement à 3 ans ou encore à l'investisseur qui anticipe une baisse des taux.**

Le nouvel emprunt d'Etat fourni par ailleurs à Christian Jaumain, actuaire et professeur à l'UCL, l'occasion de clarifier les concepts de taux actuariel et de duration, qui revêtent ici des aspects particuliers.

L'emprunt Philippe XII présente les caractéristiques suivantes:

- émission: 100 (au pair);
- durée: remboursement au pair après 3, 6 ou 9 ans au gré du souscripteur;
- coupons: respectivement 6%, 6,25% et 6,50% pendant les périodes successives de 3 ans. Les coupons de 6¼% et 6½% sont des minima qui, le cas échéant, seront relevés en fonction des taux du marché dans 3 et 6 ans respectivement. Ces coupons sont bruts. Le précompte mobilier, actuellement fixé à 13,39%, les réduit respectivement à 5,20%, 5,41% et 5,63%.

Le souscripteur est donc amené à se poser la question suivante: quel sera mon rendement minimum si je conserve cet emprunt les 9 ans? En réalité, la question ne se pose véritablement que dans l'hypothèse d'une baisse future des taux du marché. Dans le cas contraire, en effet, les coupons et donc les données du problème auront changé.

## TAUX ACTUARIEL

Pour tenter de répondre à la question, on calcule généralement le taux actuariel. Ce taux est de 6,22% brut (plus précisément 6,2199925464). Le taux actuariel représente-t-il réellement le rendement de l'emprunt? Contrairement à une opinion parfois

émise, la réponse est non! Plus précisément, non sauf concours de circonstances.

Notre emprunt prévoit les flux monétaires suivants: -100 au début de la 1<sup>re</sup> année (instant), +6 à l'instant 1 ainsi de suite, 100 + 6,50 = 106,50 à l'instant 9 (tableau 1).

Le taux actuariel de 6,22% représentera le rendement réel de notre emprunt à condition que les flux intermédiaires, c'est-à-dire les coupons, soient tous réinvestis au même taux d'intérêt de 6,22% jusqu'à la maturité de l'emprunt (instant 9). En pratique, sauf coïncidence, il n'en sera évidemment pas ainsi. Ainsi par exemple, si les coupons sont tous réinvestis à 5% jusqu'à l'instant 9, leur valeur acquise à ce moment est égale à 68,65 (tableau 2).

On vérifie de la même manière que si les coupons sont réinvestis au taux actuariel de 6,22%, on obtient un taux de rendement de 6,22%. Si les coupons sont réinvestis à 8%, on obtient un taux de rendement de 6,59%. Ce dernier résultat est cependant dénué de signification pratique puisque dans cette hypothèse, comme nous l'avons déjà remarqué, les coupons eux-mêmes auront été modifiés entretemps, de même que les données du problème.

## IMPACT DE LA FISCALITÉ

Le rendement de 5,98% résultant du réinvestissement à 5% des coupons est brut. Compte tenu du précompte de 13,39% non seulement sur les coupons, mais aussi sur les intérêts de réinvestissement des coupons, un calcul analogue conduit à un rendement net de 5,20%. Dans l'hypothèse du réinvestissement des coupons au taux actuariel de 6,22%, on trouve un rendement net de 5,39%. Le tableau 3 résume tous ces résultats et fournit les rendements brut et net pour divers taux de réinvestissement des coupons. Pour les raisons déjà indiquées, le réinvestissement à 8% de coupons inchangés n'est pas vraisemblable.

En conclusion, le taux actuariel, qui est de 6,22%, correspondra au rendement réel si tous les coupons peuvent être réinvestis à ce même

### 4. Valeur acquise par l'obligation

Evaluation après (années)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>Taux 6,22%:</b>										
Prix	100,00	100,22	100,45	100,70	100,72	100,73	100,75	100,51	100,26	100,00
Coupons réinvestis	—	6,00	12,37	19,14	26,58	34,49	42,88	52,05	61,79	72,13
Total (valeur acquise)	100,00	106,22	112,83	119,84	127,30	135,22	143,63	152,56	162,05	172,13
<b>Taux 5,00%:</b>										
Prix	108,71	108,15	107,55	106,93	106,03	105,08	104,88	102,79	101,43	100,00
Coupons réinvestis	—	6,00	12,30	18,92	26,11	33,67	41,60	50,18	59,19	68,65
Total (valeur acquise)	108,71	114,15	119,85	125,85	132,14	138,75	145,68	152,97	160,62	168,65

taux de 6,22%. Si les coupons sont réinvestis à un taux inférieur, le rendement réel sera inférieur. Ce résultat est brut. Si l'on tient compte du précompte mobilier sur les coupons et les intérêts de réinvestissement de ceux-ci, le taux actuariel est ramené à 5,39%.

### DURATION

Supposons qu'immédiatement après l'émission, le taux du marché s'établisse, par exemple, au niveau du taux actuariel de 6,22%, et reste ensuite stable jusqu'à la maturité. Dans cette hypothèse, le prix de l'obligation s'établit à 100 à 9 ans de la maturité, 100,22 à 8 ans, 100,45 à 7 ans et ainsi de suite (tableau 4, ligne 1). La valeur acquise après chaque échéance par les coupons, supposés réinvestis au même taux de 6,22%, sera successivement de 6, 12,37; 19,14 et ainsi de suite (ligne 2). Au total, prix plus valeur acquise par les coupons, la valeur acquise par l'obligation sera successivement de 100, 106,22, 112,83 et ainsi de suite (ligne 3).

Si, après l'émission, les taux baissent à 5% et restent stables ensuite, il en résultera évidemment une plus-value sur le prix et une moins-value sur le réinvestissement des coupons, comme le confirme la comparaison des lignes 1 et 4, d'une part, 2 et 5, d'autre part. Quant à la valeur acquise par l'obligation, la comparaison des lignes 3 et 6 montre qu'elle est d'abord plus grande (108,71 contre 100 puis 114,15 contre 106,22, etc.) mais qu'elle devient plus petite après la 7<sup>e</sup> échéance, c'est-à-dire à moins de 2 ans de la maturité. Un calcul précis montre que l'équilibre est atteint après 7,23 ans, soit 7 ans, 2 mois et 23 jours. A ce moment précis, la valeur acquise par l'obliga-

tion est la même, que les coupons aient été réinvestis à 6,22% ou à 5%. Cette valeur acquise est en effet égale à  $152,56 \times (1,0622)^{23} = 152,97 \times (1,05)^{23} = 154,70$ . A ce même moment précis, notre investisseur réalise donc un rendement réel de 6,22%. Le rendement est supérieur à 6,22% avant cette date fatidique, il devient inférieur ensuite.

Si les taux ne baissent qu'à 5,5%, le rendement de 6,22% est atteint après 7,21 années. Si les taux baissent à 4,5%, on trouve 7,25 ans. Si les taux montent à 8% et dans l'hypothèse invraisemblable où les coupons demeureraient inchangés, notre investisseur distrairait (car n'ayant pas demandé le remboursement) réaliserait un rendement de 6,22% après 7,13 ans.

On voit donc qu'il existe une durée, proche de 7,2 années, au bout de laquelle notre investisseur réalise un rendement égal au taux actuariel de 6,22% quelle que soit l'évolution des taux d'intérêt. Cette durée est la duration. La duration dépend du taux d'intérêt qui a servi à la calculer et qui est censé représenter le taux du marché au moment du calcul. Si ce taux change, la duration change. Ainsi, par exemple, un calcul précis qui échappe au cadre de cet article montre que la duration correspondant au taux d'intérêt actuariel de 6,22% est de 7,19 années. La duration correspondant à un taux d'intérêt de 5% est de 7,27 années. Ajoutons encore que la duration dont nous parlons ici est la duration calculée à l'émission.

### IMPACT DE LA FISCALITÉ

Contrairement au taux actuariel, la duration n'est que faiblement

influencée par la fiscalité. Compte tenu du précompte sur les coupons, la duration calculée au taux actuariel net de 5,39% est égale à 7,39 années. C'est donc la durée au bout de laquelle l'investisseur est certain de réaliser un rendement net de 5,39% quelle que soit la baisse des taux intervenue entre-temps.

### UN PARADOXE DU «PHILIPPE XII»

La 1<sup>re</sup> ligne du tableau 4 montre que, même si les taux restent stables au niveau du taux actuariel de 6,22%, le prix de l'obligation fournit une plus-value qui atteint 0,70% après 3 ans. Cette plus-value résulte de la croissance des coupons. Une obligation conventionnelle ne donne pas lieu à une telle évolution du prix.

### RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS

Le prix de l'emprunt correspond normalement au taux du marché à 3 ans. Celui-ci est voisin du taux actuariel de notre emprunt supposé remboursé au bout des 3 ans, c'est-à-dire 6%. Si le prix de l'emprunt correspondait au taux du marché à 9 ans, soit 7% environ, il aurait dû être émis à 95% au lieu de 100%. Mais dans ce cas, la sortie au pair au bout de 3 ans procurerait un rendement réel de l'ordre de 8%, ce qui serait absurde dans les circonstances actuelles.

Cet emprunt s'adresse donc à l'épargnant qui envisage un placement à 3 ans. Il peut également intéresser l'investisseur qui anticipe une baisse des taux. Le taux actuariel, qui est de 6,22%, représente le rendement réel à condition que tous les coupons soient réinvestis à 6,22%. La duration, qui est de 7,19 années, est la durée au bout de laquelle l'investisseur est certain de réaliser un rendement de 6,22% quelle que soit la baisse des taux intervenue entre-temps. Nets du précompte sur les coupons, les résultats de 6,22% et 7,19 ans deviennent respectivement 5,39% et 7,39 ans.

En définitive, il s'agit d'une construction ingénieuse et flexible, bien adaptée au contexte actuel de variabilité des taux d'intérêt, et qui peut contribuer à soulager efficacement le Trésor.

-100	+6	+6	+6	+6¼	+6¼	+6¼	+6½	+6½	+106,5
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

6,00 × [(1,05) <sup>1</sup> + (1,05) <sup>2</sup> + (1,05) <sup>3</sup> ]	
+ 6,25 × [(1,05) <sup>2</sup> + (1,05) <sup>3</sup> + (1,05) <sup>4</sup> ]	
+ 6,50 × [(1,05) <sup>3</sup> + (1,05) <sup>4</sup> + 1]	= 68,65
Le taux de rendement qui en résulte est de 5,98%:	$\left[ \frac{168,65}{100} \right]^{1/9} - 1 = 5,98\%$

Taux de réinvestissement des coupons	Rendement	
	Brut	Net
4,00%	5,79%	5,06%
5,00%	5,98%	5,20%
5,50%	6,08%	5,28%
6,00%	6,18%	5,36%
6,22%	6,22%	5,39%
8,00%	6,59%	5,67%